МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І.І. МЕЧНИКОВА

Л.А. Косирева, А.Л. Рачинська

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ЗА КУРСОМ "ОПІР МАТЕРІАЛІВ"

для студентів спеціальності "Механіка"

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені І.І.МЕЧНИКОВА
2011

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ЗА КУРСОМ "ОПІР МАТЕРІАЛІВ"

Цей методичний посібник розроблено для студентів спеціальності Механіка ІМЕМ ОНУ та містить 5 контрольних робіт, які охоплюють основні типи розрахунків в опорі матеріалів.

Кожна контрольна робота містить 10 варіантів умови та має відповідний зразок розв'язку. Зразок розв'язку розроблений таким чином, щоб спростити студентові самостійне вивчення даної теми. В ньому крім детальних пояснень є рисунки епюр, побудова яких проводиться в ході рішення задачі. Чиселений розрахунок внутрішніх силових факторів доводиться до закінченої відповіді, при чому проводиться перевірка отриманих епюр.

Студент, який ознайомився та детально вивчив зразок, може успішно справитися з виконанням свого завдання.

Автори/Укладачі:
А.Л. Рачинська, кандидат фізико - математичних наук, доцент
Л.А. Косирева, старший викладач

Рецензенти:
Н.Д. Вайсфельд, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри методів математичної фізики ІМЕМ ОНУ імені І.І. Мечникова;
В.Е. Волков, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри КС і УБП Одеської національної академії харчових технологій

Рекомендовано до друку
Вченою радою ІМЕМ ОНУ.
(Протокол №4 від 20 квітня 2010р.)

Завдання №1 Розрахунок бруса на розтяг - стиск з урахуванням власної ваги

Стальний стержень ($E = 2 \cdot 10^6$ $кГ/см^2$) знаходиться під дією повздовжної сили F та власної ваги ($\gamma = 7,8$ $T/м^3$). Знайти переміщення перерізу $I - I$ (рис. 2). Дані узяти з табл. 1.

Вказівки. Розрахунок на розтяг-стиск проводиться для двоступінчатого вагомого бруса.

Зразок завдання №1

Дано: $a = 2$ $м$, $b = 1$ $м$, $c = 0,7$ $м$, $d = 0,6$ $м$, $\gamma = 7,8$ $T/м^3 = 78$ $кН/м^3$, $F = 2$ $кН$, $A_1 = 20$ $см^2$, $A_2 = 10$ $см^2$.

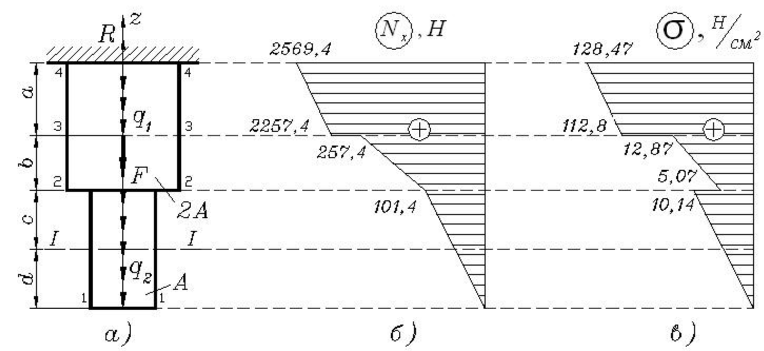


Рис. 1

Розв'язок

1. Розрахунок брусу на розтяг з урахуванням власної ваги зводиться до того, що крім постійної зосередженої сили F, діють два равномірно розподілені навантаження інтенсивності q_1 та q_2 на відрізках $1 - 2$ та $2 - 3$ відповідно (рис. 1).

$$q_1 = \gamma \cdot A_1 = 78кН/м^3 \cdot 20см^2;\ \ q_1 = 156\ Н/м;$$
$$q_2 = \gamma \cdot A_2 = 78кН/м^3 \cdot 10см^2 = 78кН/м^3 \cdot 10^{-3}м^2;\ \ q_2 = 78\ Н/м.$$

2. Розбиваємо брус на відрізки. Точками поділу є початок та кінець конструкції, початок та кінець навантаження, а також точка прикладання зосередженої сили. Таким чином, брус розбивається на три відрізки.

3. Побудуємо епюру повздовжних сил N, причому побудову почнемо з вільного кінця бруса. Вісь z спрямуємо по вісі бруса знизу догори з початком відліку у перерізі $1 - 1$.

   Проведемо довільний поперечний переріз бруса $z - z$ на відрізку $1 - 2$, для якого $0 \leq z \leq c + d$, т.б. $0 \leq z \leq 1,3$. Відкидаємо верхню частину (по відношенню до перерізу $z - z$) бруса та розглядаємо рівновагу нижньої частини довжини z. На даному відрізку діє навантаження інтенсивності q_2, рівнодіюча якого є силою розтягу для перерізу $z - z$.

$$N = q_2 \cdot z = 78z\ (Н);$$
$$N(0) = 0;$$
$$N(1,3) = 101,4\ (Н).$$

Епюра повздовжних сил N для зазначеного відрізку конструкції зображена на рис. 1.

Проведемо довільний поперечний переріз бруса $z - z$ на відрізку $2 - 3$, для якого $c + d \leq z \leq c + d + b$, т.б. $1,3 \leq z \leq 2,3$. Відкидаємо верхню частину бруса та розглядаємо рівновагу нижньої частини довжиною z. На даному відрізку діє навантаження інтенсивності q_2 (на відрізку довжиною $c + d$) та навантаження інтенсивності q_1 (на відрізку довжиною $z - (c + d)$).

$$N = q_2 \cdot (c + d) + q_1 \cdot (z - (c + d)) = 78 \cdot 1,3 + 156 \cdot (z - 1,3);$$

$$N = 101,4 + 156 \cdot (z - 1,3) \textit{ (Н)};$$
$$N(1,3) = 101,4 \textit{ (Н)};$$
$$N(2,3) = 257,4 \textit{ (Н)}.$$

Епюра повздовжних сил N для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 1.

Проведемо довільний поперечний переріз бруса $z - z$ на відрізку $3 - 4$, для якого $c + d + b \leq z \leq c + d + b + a$, т.б. $2,3 \leq z \leq 4,3$. Відкидаємо верхню частину бруса та розглядаємо рівновагу нижньої частини бруса довжиною z. На даному відрізку діє навантаження інтенсивності q_2 (на відрізку довжиною $c + d$), навантаження інтенсивності q_1 (на відрізку довжиною $z - (c + d)$) та повздовжна сила F в перерізі $3 - 3$.

$$N = q_2(c + d) + q_1(z - (c + d)) + F = 78 \cdot 1,3 + 156(z - 1,3) + 2000;$$

$$N = 2101,4 + 156(z - 1,3) \textit{ (Н)};$$
$$N(2,3) = 2257,4 \textit{ (Н)};$$
$$N(4,3) = 2569,4 \textit{ (Н)}.$$

Епюра повздовжних сил N для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 1.

Можна зробити перевірку побудови епюри повздовжних сил N. Для цього складемо рівняння рівноваги всього бруса в цілому, де R – сила реакції затиснення.

$$R - q_1(a + b) - q_2(c + d) - F = 0;$$
$$R = q_1(a + b) + q_2(c + d) + F = 156 \cdot 3 + 78 \cdot 1,3 + 2000 = 2569,4 \textit{ (Н)}.$$

З рис. 1 видно, що величина повздовжної сили на эпюрі повздовжних сил у перерізі $4 - 4$ дорівнює модулю сили реакції затиснення. Крім цього, на епюрі повздовжних сил в перерізі $3 - 3$ маємо стрибок, за величиною рівний модулю зосередженої сили F.

4. Побудуємо епюру нормальних напружень, використовуючи формулу розрахунку для конструкцій, що піддаються деформації – стиску $\sigma = \dfrac{N}{A}$. Побудову епюри напружень проводимо аналогічно епюрі повздовжних сил.

   Розглянемо відрізок бруса $1 - 2$ якщо $0 \leq z \leq c + d$, т.б. $0 \leq z \leq 1,3$.

$$\sigma = \frac{N}{A_2} = \frac{q_2 z}{A_2} = \frac{78z}{10} = 7,8z \textit{ (Н/см}^2\textit{)};$$
$$\sigma(0) = 0;$$
$$\sigma(1,3) = 10,14 \textit{ (Н/см}^2\textit{)}.$$

Епюра нормальних напружень σ для вказаного відрізка конструкції зображена на рис. 1.

Розглянемо відрізок бруса $2-3$ якщо $c+d \le z \le c+d+b$, т.б. $1,3 \le z \le 2,3$.

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = \frac{q_2(c+d)+q_1(z-(c+d))}{A_1} = \frac{101,4+156(z-1,3)}{20};$$
$$\sigma = 5,07+7,8(z-1,3) \ (Н/см^2);$$
$$\sigma(1,3) = 5,07 \ (Н/см^2);$$
$$\sigma(2,3) = 12,87 \ (Н/см^2).$$

Епюра нормальних напружень σ для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 1.

Розглянемо відрізок бруса $3-4$ якщо $c+d+b \le z \le c+d+b+a$, т.б. $2,3 \le z \le 4,3$.

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = \frac{q_2(c+d)+q_1(z-(c+d))+F}{A_1} = \frac{2101,4+156(z-1,3)}{20};$$
$$\sigma = 105,07+7,8(z-1,3) \ (Н/см^2);$$
$$\sigma(2,3) = 112,8 \ (Н/см^2);$$
$$\sigma(2,3) = 128,47 \ (Н/см^2).$$

Епюра нормальних напружень σ для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 1.

Із рис. 1 видно, що на епюрі нормальних напружень два стрибки. Один стрибок відповідає перерізу $3-3$, де прикладено зосереджену силу F. Другий стрибок відповідає перерізу $2-2$, де у бруса змінюється площа поперечного перерізу.

5. Знайдемо переміщення перерізу $I-I$. Переміщення затисненого кінця, т.б. перерізу $4-4$, дорівнює нулю $u_4 = 0$.

   Переміщення перерізу $3-3$ визначається величиною розтягу відрізка бруса $4-3$ $u_3 = \Delta l_{4-3}$.

   Відомо, що розтяг бруса довжиною l визначається за формулою

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N\,dz}{EA},$$

   де $N = N(z)$ – функція повздовжних сил на ділянці $4-3$. Побудова функції $N = N(z)$ проводилася для вісі z,що напрямлена знизу догори, з початком відліку у перерізі $1-1$ (рис. 1).

Тоді

$$u_3 = \Delta l_{3-4} = \int_{d+c+b+a}^{d+c+b} \frac{N\,dz}{EA_1} = \frac{1}{EA_1}\int_{4,3}^{2,3}(2101,4 + 156(z-1,3))dz =$$
$$= \frac{1}{EA_1}\int_{4,3}^{2,3}(1898,6 + 156z))dz =$$
$$= \frac{1}{EA_1}(1898,6z + 78z^2)\Big|_{4,3}^{2,3} = -\frac{4826,8\ \textit{Н}\cdot \textit{м}}{2\cdot 10^7 \textit{Н}/\textit{см}^2\cdot 20\textit{см}^2};$$

$$u_3 = \Delta l_{3-4} \approx -1,2\cdot 10^{-2}\ \textit{мм}.$$

Переміщення перерізу $2-2$ складається з переміщення перерізу $3-3$ та переміщення перерізу $2-2$ по відношенню до перерізу $3-3$, яке обумовлено розтягом відрізка бруса $3-2$.

$$\Delta l_{3-2} = \int_{d+c+b}^{d+c} \frac{N\,dz}{EA_1} == \frac{1}{EA_1}\int_{2,3}^{1,3}(101,4 + 156(z-1,3))dz =$$
$$= \frac{1}{EA_1}\int_{2,3}^{1,3}(-101,4 + 156z))dz =$$
$$= \frac{1}{EA_1}(-101,4z + 78z^2)\Big|_{2,3}^{1,3} = -\frac{179,4\ \textit{Н}\cdot \textit{м}}{2\cdot 10^7 \textit{Н}/\textit{см}^2\cdot 20\textit{см}^2};$$

$$\Delta l_{3-2} \approx -0,5\cdot 10^{-3}\textit{мм}.$$

Тоді

$$u_2 = u_3 + \Delta l_{3-2} = -1,2\cdot 10^{-2}\textit{мм} - 0,5\cdot 10^{-3}\textit{мм};$$
$$u_2 = -1,25\cdot 10^{-2}\textit{мм}.$$

Переміщення перерізу $I-I$ складається з переміщення перерізу $2-2$ та переміщення перерізу $I-I$ по відношенню до перерізу $2-2$, яке обумовлено разтягом відрізка бруса $2-I$.

$$\Delta l_{2-I} = \int_{d+c}^{d} \frac{N\,dz}{EA_2} = \frac{1}{EA_2}\int_{1,3}^{0,8} 78z\,dz = \frac{1}{EA_2}\cdot 39z^2\Big|_{1,3}^{0,8};$$
$$\Delta l_{2-I} \approx -0,2\cdot 10^{-3}\textit{мм}.$$

Тоді

$$u_I = u_2 + \Delta l_{2-I} = -1,25\cdot 10^{-2}\ \textit{мм} - 0,2\cdot 10^{-3}\ \textit{мм};$$
$$u_I = -1,27\cdot 10^{-2}\textit{мм}.$$

Переміщення перерізу $I-I$ має знак "-". Це пояснюється тим, що вісь z напрямлена зверху вниз, а переміщення перерізу $I-I$ напрямлено вниз, так як брус розтягується.

Таблиця 1

Схема	A, см^2	a, м	b, м	c, м	F, Н
I	11	2,1	2,1	1,1	110
II	12	2,2	2,2	1,2	120
III	13	2,3	2,3	1,3	130
IV	14	2,4	2,4	1,4	140
V	15	2,5	2,5	1,5	150
VI	16	2,6	2,6	1,6	160
VII	17	2,7	2,7	1,7	170
VIII	18	2,8	2,8	1,8	180
IX	19	2,9	2,9	1,9	190
X	20	3,0	3,0	2,0	200

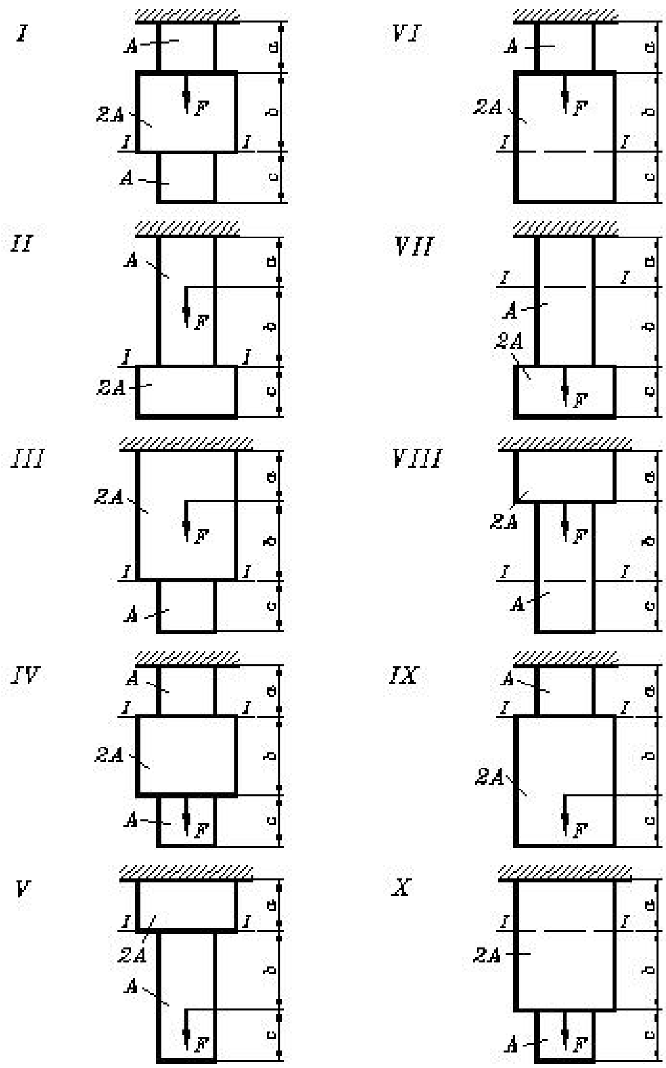


Рис. 2

Завдання №2 Розрахунок на міцність балки

Для заданих двох схем балок (рис. 5) необхідно написати вираз $M_{изг}$ та Q для кожного відрізка у загальному вигляді, побудовати епюри Q та M, знайти M_{max} та підібрати:

1) Для схеми (а) дерев'яну балку круглого поперечного перерізу якщо $[\sigma] = 80$ *кГ/см*^{2};
2) Для схеми (б) стальну балку двутаврового поперечного перерізу якщо $[\sigma] = 1600$ *кГ/см*^{2}.

Дані узяти з табл. 2.

Вказівка. Розрахунок на міцність проводиться для статично визначеної балки, яка працює на прямий згин.

Зразок завдання №2

Дано: $P = 1$ *кГ*, $M = 1$ *кГ/м*, $q = 2$ *кГ/м*

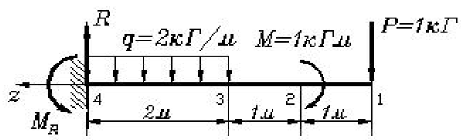


Рис. 3

Розв'язок

1. Розбиваємо балку на відрізки. Для епюри поперечних сил точками поділу є початок та кінець конструкції, початок та кінець навантаження, точка прикладення зосередженої сили P. Для епюри згинаючих моментів додається ще одна точка поділу – точка прикладання моменту M. Таким чином, балка розбивається на три відрізки у загальному випадку.

2. Побудуємо епюру поперечних сил Q, причому побудову почнемо з консолі. Вісь z напрямлено вздовж осі балки справа наліво з початком відліку в т. 1.

   Проведемо довільний поперечний переріз $z - z$ на відрізку $1 - 3$, для якого $0 \leq z \leq 2$. Відкидаємо ліву (по відношенню до перерізу $z - z$) частину балки та розглядаємо рівновагу правої частини балки довжиною z. На даному відрізку діє зосереджена сила P в т. 1.

   $$Q = P = 1кГ.$$

   Епюра поперечних сил Q для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 4б.

   Проведемо довільний поперечний переріз $z - z$ на відрізку $3 - 4$, для якої $2 \leq z \leq 4$. На даному відрізку балки діють зосереджена сила P в т. 1 та навантаження постійної інтенсивності q на відрізку довжиною $(z - 2)$.

   $$Q = P + q(z-2) = 1 + 2(z-2)\ (кГ);$$
   $$Q = 1\ (кГ);$$
   $$Q = 1{+}2{\cdot}2 = 5\ (кГ).$$

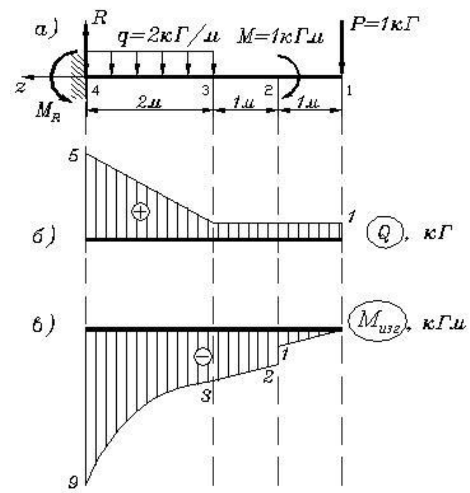


Рис. 4

Епюра поперечних сил Q для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 4б.

Можна провести перевірку побудови епюри поперечних сил Q. Для цього складемо рівняння рівноваги всієї балки у проекціях на вісь вертикалі, де R – сила реакції затиснення.

$$R = 2{\cdot}q{+}P = 2{\cdot}2{+}1 = 5 \text{ (кГ)}.$$

З рис. 4б видно, що величина поперечної сили в т. 4 дорівнює модулю сили реакції затиснення.

Крім того, на епюрі поперечних сил маємо стрибок в т. 1, який за величиною дорівнює модулю зосередженої сили P.

3. Побудуємо епюру згинаючих моментів $M_{изг}$, причому побудову будемо проводити по відношенню до раніше обраної вісі z. Для побудови епюри згинаючих моментів додається ще одна точка поділу, а саме, точка прикладання моменту M.

Проведемо довільний поперечний переріз $z - z$ на відрізку $1 - 2$, для якого $0 \leq z \leq 1$. На даному відрізку діє зосереджена сила P, яка по відношенню до перерізу створює момент величиною $-Pz$.

$$M_{изг} = -P \cdot z = -z \text{ (кГ} \cdot \text{м)};$$
$$M_{изг}(0) = 0;$$
$$M_{изг}(1) = -1 \text{ (кГ}{\cdot}\text{м)}.$$

Графік згинаючого моменту – пряма. Епюра згинаючих моментів $M_{изг}$ для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 4в.

Аналогічно розглянемо відрізок балки $2 - 3$, т.б. $1 \leq z \leq 2$. Момент сили P по відношенню до перерізу $z - z$ дорівнює $-Pz$. Ще додамо момент $-M$.

$$M_{изг} = -P \cdot z - M = -z - 1 \text{ (кГ} \cdot \text{м)};$$
$$M_{изг}(1) = -2 \text{ (кГ} \cdot \text{м)};$$
$$M_{изг}(2) = -3 \text{ (кГ}{\cdot}\text{м)}.$$

Графік згинаючого моменту – пряма. Епюра згинаючих моментів $M_{изг}$ для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 4в.

Для відрізка балки $3-4$ $(2 \leq z \leq 4)$ маємо:

$$M_{изг} = -P \cdot z - M - \frac{q(z-2)^2}{2} = -z - 1 - (z-2)^2 \ (кГ \cdot м);$$
$$M_{изг}(2) = -2 - 1 = -3 \ (кГ \cdot м);$$
$$M_{изг}(4) = -4 - 1 - 2^2 = -9 \ (кГ \cdot м).$$

Графік згинаючого моменту $M_{изг}(z)$ – парабола, "гілками" донизу, вершину якої необхідно визначити.

$$M'_{зг} = -P - q(z-2) = 0;$$
$$z = \frac{-P + 2 \cdot q}{q} = \frac{-1 + 2 \cdot 2}{2} = 1,5 \ (м).$$

Епюра згинаючих моментів $M_{изг}$ для вказаного відрізка конструкції зображена на рис. 4в.

4. Проведемо розрахунок на міцність та визначимо діаметр дерев'яної балки круглого поперечного перерізу.

   З епюри згинаючого моменту (рис. 4в) можна побачити, що

$$|M_{max}| = 9 \ кГ \cdot м.$$

   Умова на міцність при згині має вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\,\sigma\,];$$
$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\,\sigma\,]}.$$

   Для круглого поперечного перерізу

$$W_x = 0,2\,d^3 \quad \Longrightarrow \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{0,2 \cdot [\,\sigma\,]}};$$
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{9 \ кГ \cdot м}{0,2 \cdot 80 \ кГ/см^2}}\,, \ d \geq \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^2 \ кГ \cdot см}{16 \ кГ/см^2}};$$
$$d \geq 3,83 \ см;$$
$$d = 4 \ см.$$

5. У випадку двутаврового поперечного перерізу з умови міцності визначається вісевий момент опору W_x та за таблицею ГОСТ 8239 - 56 підбирається переріз.

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\,\sigma\,]};$$
$$W_x \geq \frac{9 \ кГ \cdot м}{1600 \ кГ/см^2};$$
$$W_x \geq 0,5625 \ см^3.$$

   Двутавр №10.

Таблица 2

Схема	l_1, м	l_2, м	$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$	M, Т $\cdot$ м	P, Т	q, Т/м
I	1,1	6	1	9	1	0,1	0,1	1,0
II	1,2	7	2	8	2	0,2	0,2	2,0
III	1,3	3	3	7	3	0,3	0,3	0,3
IV	1,4	4	4	6	4	0,4	0,4	0,4
V	1,5	5	5	5	5	0,5	0,5	0,5
VI	1,6	6	6	6	1	0,6	0,6	0,6
VII	1,7	7	7	7	2	0,7	0,7	0,7
VIII	1,8	8	8	8	3	0,8	0,8	0,8
IX	1,9	9	9	9	4	0,9	0,9	0,9
X	2,0	10	10	10	5	1,0	1,0	1,0

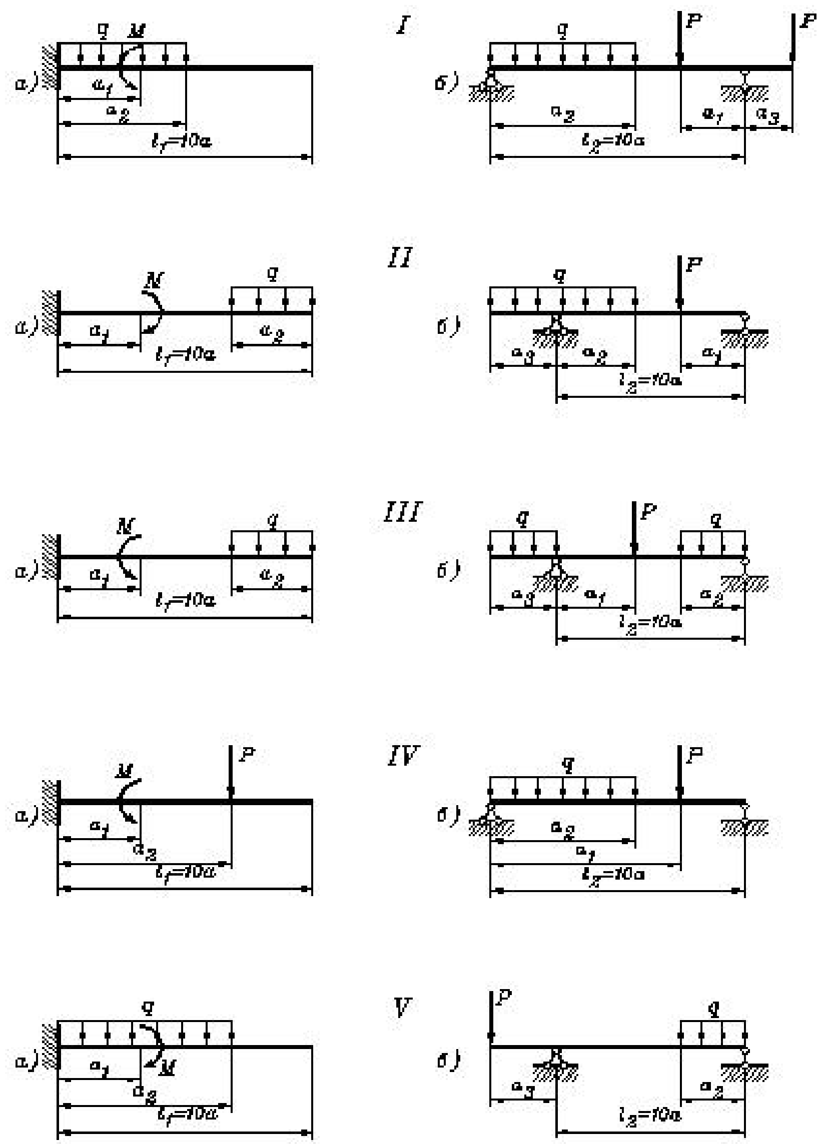
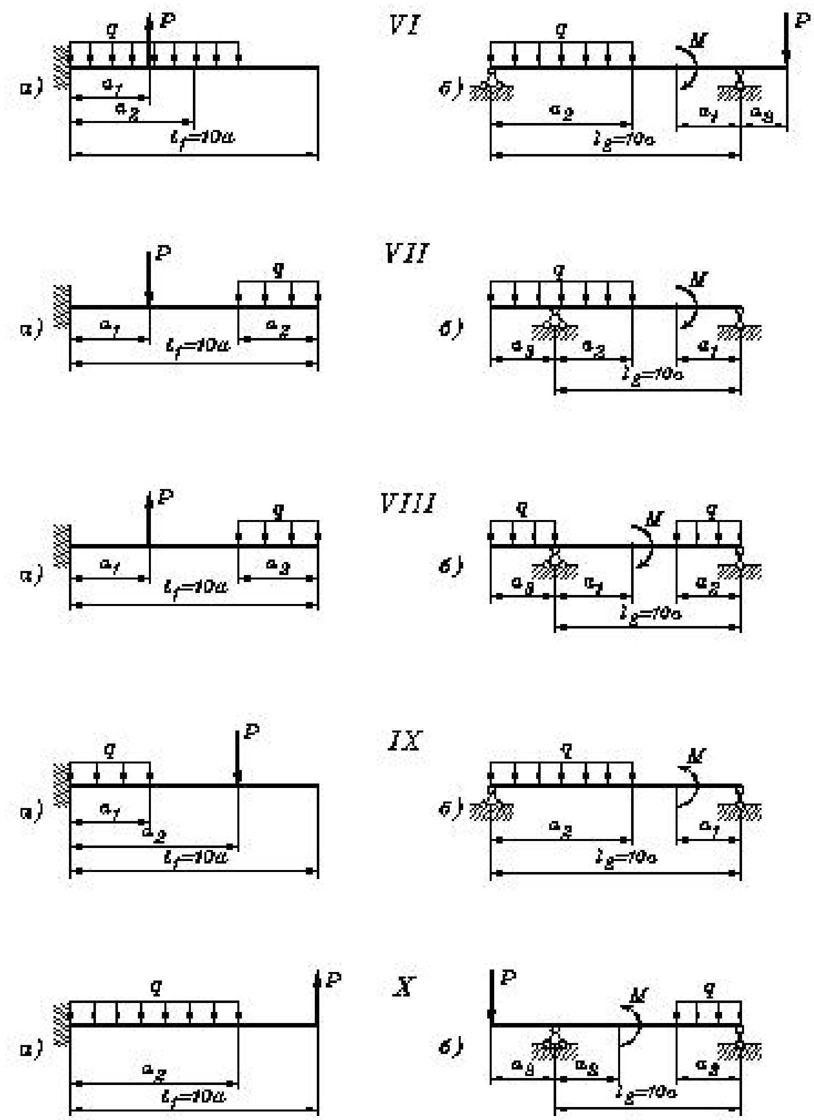


Рис. 5



продовження Рис.5

Завдання №3 Побудова епюр згинаючих та крутячих моментів плоскопросторих рам

На рис. 9 зображена вісь ломаного стержня круглого поперечного перерізу, яка розташована у горизонтальній площині та має прямі кути у точках A та B. На стержень діють вертикальні навантаження. Треба побудувати окремо епюри згинаючих та крутячих моментів. Дані узяти з табл. 3.

Вказівка. Для кожного відрізка ламаного стержня необхідно побудувати момент відносно осей x, y, z.

Зразок завдання №3

Дано: Плоскопростора рама, на яку діють два вертикальні навантаження інтенсивності q, як зображено на рис. 6

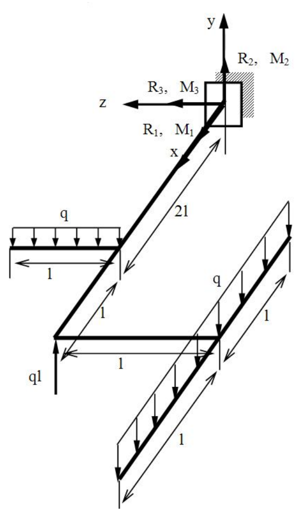


Рис.6

Розв'язок

1. Розбиваємо рамну конструкцію на відрізки. Точками поділу є початок та кінець кожного стержня рами, початок та кінець навантажень, а також точка прикладання зосередженої сили (рис. 6).

2. Побудова епюр згинаючих та крутячих моментів буде проводитися одночасно.

   Розглянемо відрізок рамної конструкції $0-2$, для якого $0 \le z \le l$. Вибрана система координат показана на рис. 7.

   На даному відрізку по всій довжині, діє рівномірнорозподілене навантаження інтенсивності q. Проведемо довільний поперечний переріз брусу $z-z$, по відношенню до якого визначемо моменти.

$$M_x = -qz^2/2;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(l) = -ql^2/2.$$

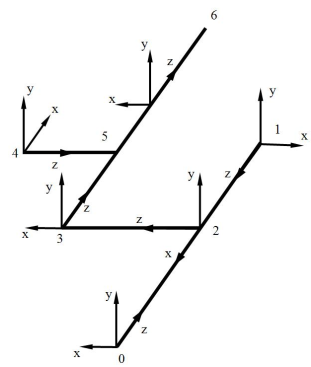


Рис.7

Епюра згинаючого моменту $M_x = M_x(z)$ – парабола, "гілками" донизу, з вершиною у точці $z = 0$.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 0.$$

Епюри згинаючих моментів M_x, M_y та епюра крутячого момента $M_{кр}$ для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 8.

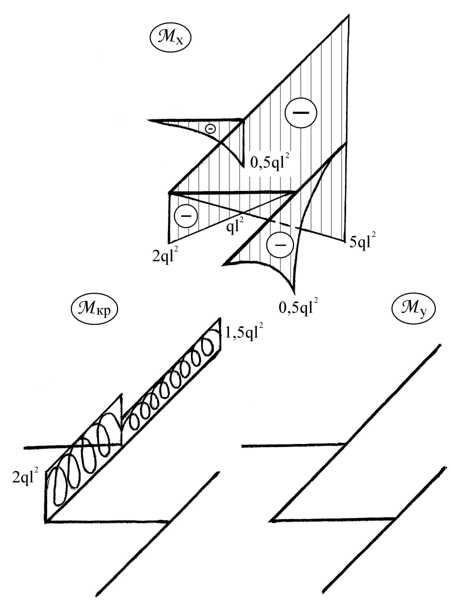


Рис.8

Розглянемо відрізок рамної конструкції $1 - 2$, для якого $0 \leq z \leq l$. (Обрана система координат вказана на рис. 7). На зазначеному відрізку, також діє рівномірнорозподілене навантаження інтенсивності q. Проведемо довільний поперечний переріз $z - z$.

$$M_x = -qz^2/2;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(l) = -ql^2/2.$$

Маємо епюру аналогічну епюрі відрізка $0-2$.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 0.$$

Проводимо довільний поперечний переріз $z-z$ на відрізку рамної конструкції $2-3$, для якого $0 \le z \le l$. Відкидаємо ліву частину рамної конструкції та розглядаємо рівновагу правої частини. На дану частину конструкції діє навантаження інтенсивності q на відрізку довжиною $2l$.

$$M_x = -\,2ql \cdot z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(l) = -\,2ql^2.$$

Епюра згинаючого моменту $M_x = M_x(z)$ – пряма.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 0.$$

Епюри згинаючих моментів M_x, M_y та епюра крутячого момента $M_{кр}$ для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 8.

Розглянемо відрізок рамної конструкції $3-5$, для якого $0 \le z \le l$. (Обрана система координат показана на рис. 7). На дану частину конструкції діє навантаження на відрізку $0-1$ та зосереджена сила у точці 3.

$$M_x = -\,2ql \cdot z + ql \cdot z = -\,ql \cdot z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(l) = -\,ql^2.$$

Епюра згинаючого моменту $M_x = M_x(z)$ – пряма.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 2\,ql^2.$$

Епюри згинаючих моментів M_x, M_y та епюра крутячого момента $M_{кр}$ для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 8.

Проводимо довільний поперечний переріз на відрізку рамної конструкції $4-5$, для якого $0 \le z \le l$. На цей відрізок діє рівномірнорозподілене навантаження інтенсивності q.

$$M_x = -\,qz^2/2;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(l) = -\,ql^2/2.$$

Епюра згинаючого моменту на відрізку $4-5$ подібна епюрі на відрізку $0-2$.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 0.$$

Епюри згинаючих моментів M_x, M_y та епюра крутячего момента $M_{кр}$ для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 8.

Проводимо довільний поперечний переріз на відрізку рамної конструкції $5-6$, для якого $0 \le z \le 2l$. На дану частину конструкції рами діють рівномірнорозподілене навантаження на відрізку $0-1$, рівномірнорозподілене навантаження на відрізку $4-5$ та зосереджена сила в точці 3.

$$M_x = -2ql(z+l) + ql(z+l) - ql\,z = -ql(z+l) - ql\,z;$$
$$M_x(0) = -ql^2;$$
$$M_x(2l) = -5ql^2.$$

Епюра згинаючого моменту $M_x = M_x(z)$ – пряма.

$$M_y = 0;$$
$$M_{кр} = 2ql^2 - ql^2/2 = 1,5\,ql^2.$$

Епюри згинаючих моментів M_x, M_y та епюра крутячого момента $M_{кр}$ для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 8.

3. Проведемо перевірку побудованих епюр (рис. 8), для цього складемо рівняння рівноваги просторової системи сил. (Обрана система координат показана на рис. 6). Для перевірки епюр моментів нам необхідні тільки значення моментів реакції затиснення M_1, M_2 и M_3.

$$\sum M_x = 0;\ M_1 - 2\,ql^2 + 0,5\,ql^2 = 0, \text{звідки } M_1 = 1,5ql^2;$$

$$\sum M_y = 0;\ \ M_2 = 0;$$

$$\sum M_z = 0\,; M_3 + ql\cdot 3l - 2ql\cdot 3l - ql\cdot 2l = 0, \text{звідки } M_3 = 5ql^2.$$

Величина момента реакції затиснення M_1 дорівнює за величиною крутячому моменту на опорі $M_{кр}$ у точці 6. Модуль згинаючого момента M_x у точці 6 за величиною дорівнює моменту реакції затиснення M_3.

Крім того, на епюрі крутячих моментів $M_{кр}$ (рис. 8) маємо стрибок у точці 5, який за своєю величиною дорівнює згинаючому моменту M_x у точці 5 на відрізку $4-5$. Крім того, величина крутячого момента $M_{кр}$ у точці 3 відповідає модулю згинаючого момента M_x у точці 3 на відрізку $2-3$.

Таблиця 3

Схема	l, м	h, м	q, Т/м	α	β
I	11	2	1,5	1,1	0,1
II	12	3	2,0	1,2	0,2
III	3	4	3,0	1,3	0,3
IV	4	5	0,4	1,4	0,4
V	5	6	0,5	1,5	0,5
VI	6	2	0,6	0,6	0,6
VII	7	3	0,7	0,7	0,7
VIII	8	4	0,8	0,8	0,8
IX	9	5	0,9	0,9	0,9
X	10	6	1,0	1,0	1,0

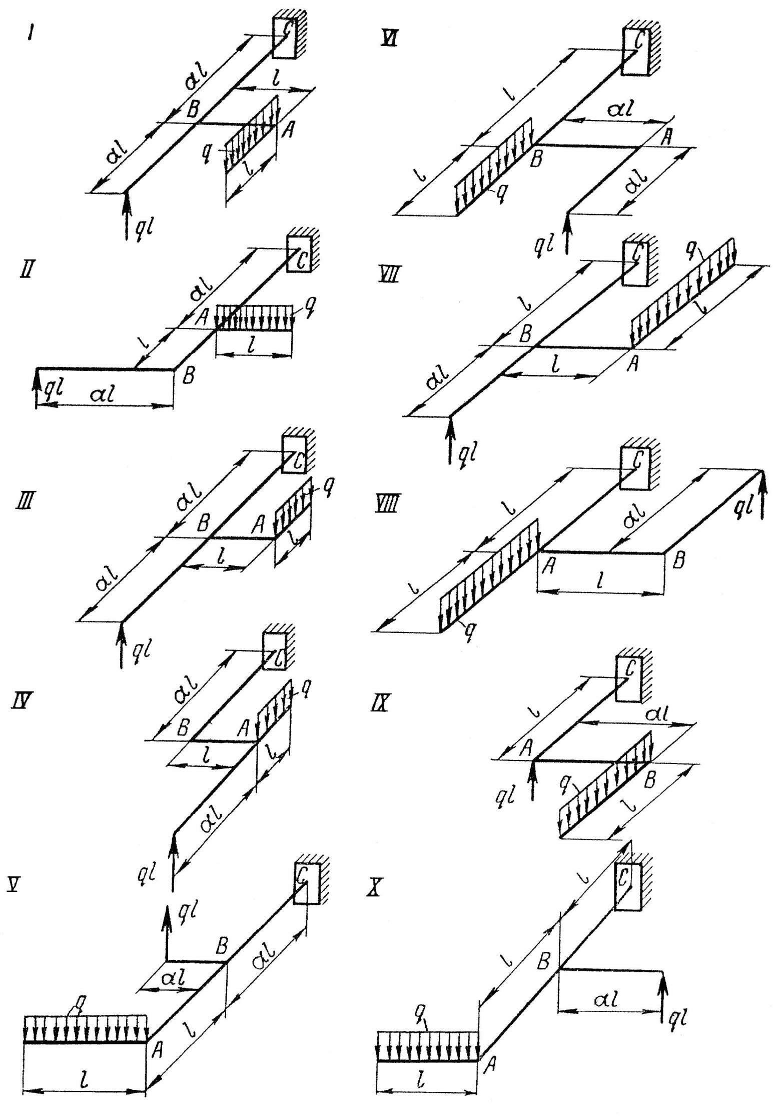


Рис.9

Завдання №4 Розкриття статичної невизначеності плоских рам

Для заданої статично невизначеної рами (рис. 17) необхідно:

1) Встановити степінь статичної невизначеності;
2) Вибрати основну систему;
3) Записати канонічні рівняння;
4) Побудувати епюри M від одиничних сил та від зовнішнього навантаженння та обчислити за допомогою метода Верещагіна усі переміщення, що входять до канонічніх рівнянь;
5) Знайти величини зайвих невідомих, розв'язавши рівняння;
6) Побудувати кінцеві епюри $M,\ N,\ Q$;
7) Перевірити правильність побудови кінцевої епюри M, помноживши її на кожну з одиничних епюр.

Дані узяти з табл. 4. *Вказівка.* Розкриття статичної невизначеності рамних конструкцій проводиться методом сил. Він полягає в тому, що складаються канонічні рівняння (виражають умови, що сумарне переміщення від зовнішніх сил та усіх зайвих невідомих за напрямом кожного з зайвих невідомих дорівнює нулю), які дозволяють визначити зайві зв'язки.

Зразок завдання №4

Дано: $P_1 = 1$ т, $P_2 = 8$ т, $q = 1$ т/м

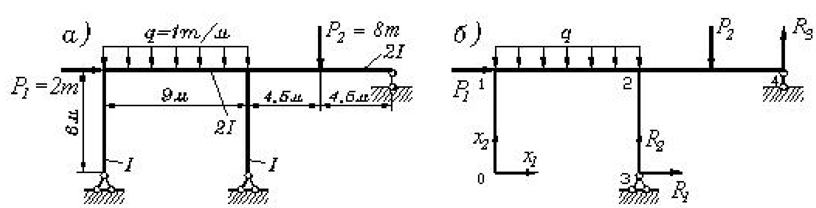


Рис.10

Розв'язок

1. Рамна конструкція (рис. 10а) внутрішнім чином статично визначена та зовнішним чином два рази статично невизначена, так як 5 невідомих сил реакцій зв'язків та 3 рівняння рівноваги плоскої системи сил.
2. Оберемо основну схему, відкинувши зайві зв'язки у точці O (рис. 10б).
3. Запишемо канонічні рівняння методу сил

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

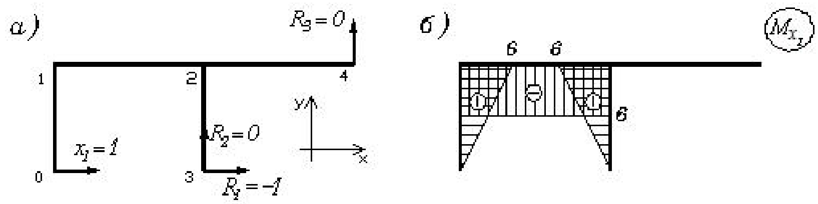


Рис.11

4. По-перше, побудуємо епюру згинаючих моментів від одиничної сили $x_1 = 1$.

Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи сил. (Обрана система координат показана на рис. 11).

Сума проекції сил на вісь x и y дорівнює нулю.

$$\sum_i F_{x_i} = 0\,; \quad x_1 + R_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_1 = -\,1;$$
$$\sum_i F_{y_i} = 0\,; \quad R_2{+}R_3 = 0.$$

Сума моментів всіх сил по відношенню до точки 3 дорівнює нулю.

$$\sum_i M_3(\overline{F}_i) = 0\,;$$
$$R_3{\cdot}9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_2 = 0.$$

Будуємо епюру згинаючих моментів для рамної конструкції від одиничної сили x_1. Проводимо довільний поперечний переріз на кожному з відрізків та складаємо рівняння моментів по відношенню до цього переріза.

Відрізок $0 - 1$, де $0 \le z \le 6$

$$M_x = -\,x_1 \cdot z = -\,z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(6) = -\,6.$$

Відрізок $1 - 2$, де $0 \le z \le 9$

$$M_x = -\,x_1{\cdot}6 = -\,6.$$

Відрізок $3 - 2$, де $0 \le z \le 6$

$$M_x = -\,R_1 \cdot z = -\,z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(6) = -\,6.$$

Відрізок $4 - 3$, де $0 \le z \le 9$

$$M_x = 0.$$

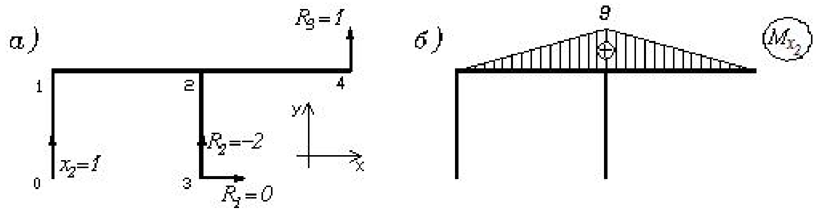


Рис.12

По-друге, побудуємо епюру згинаючих моментів від одиничної сили $x_2 = 1$.
Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи сил (рис. 12).

$$\begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0\,; & R_1 = 0; \\ \sum_i F_{y_i} = 0\,; & x_2 + R_2 + R_3 = 0; \\ \sum_i M_3(\overline{F}_i) = 0\,; & x_2 \cdot 9 + R_3 \cdot 9 = 0. \end{cases}$$

$$R_1 = 0, \quad R_2 = -2, \quad R_3 = 1.$$

Будуємо епюру згинаючих моментів для рамної конструкції від одиничної сили x_2.
Відрізок $0-1$, де $0 \le z \le 6$

$$M_x = 0.$$

Відрізок $1-2$, де $0 \le z \le 9$

$$M_x = x_2 \cdot z = z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(9) = 9.$$

Відрізок $3-2$, де $0 \le z \le 6$

$$M_x = 0.$$

Відрізок $4-2$, де $0 \le z \le 9$

$$M_x = R_3 \cdot z = z;$$
$$M_x(0) = 0;$$
$$M_x(9) = 9.$$

По-третє, побудуємо вантажну епюру згинаючих моментів.
Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи сил (рис. 13).

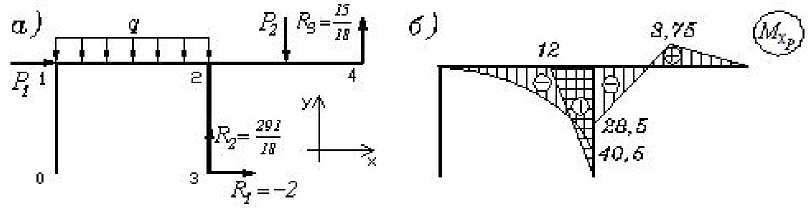


Рис.13

$$\begin{cases} \sum\limits_i F_{x_i}=0\,;\;\; P_1+R_1=0; \\ \sum\limits_i F_{y_i}=0\,;\;\; R_2+R_3-P_2-q\cdot 9=0; \\ \sum\limits_i M_3(\overline{F}_i)=0\,; \\ -P_1\cdot 6+q\cdot 9\cdot 4{,}5-P_2\cdot 4{,}5+R_3\cdot 9=0; \end{cases}$$

$$R_1=-2,\quad R_2=\frac{291}{18},\quad R_3=\frac{15}{18}.$$

Складемо вантажну епюру згинаючих моментов.

Відрізок $0-1$, де $0\le z\le 6$

$$M_x=0.$$

Відрізок $1-2$, де $0\le z\le 9$

$$M_x=-\,qz^2/2=-\,z^2/2;$$
$$M_x(0)=0;$$
$$M_x(9)=-\,40{,}5.$$

Відрізок $3-2$, де $0\le z\le 6$

$$M_x=R_1\cdot z=-\,2z;$$
$$M_x(0)=0;$$
$$M_x(0)=-\,12.$$

Відрізок $4-2$, де $0\le z\le 9$ розбивається на два, так як у точці $z=4{,}5$ прикладена зосереджена сила P_2.

$0\le z\le 4{,}5$

$$M_x=R_3\cdot z=\frac{15}{18}\,z;$$
$$M_x(0)=0;$$
$$M_x\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{15}{4}.$$

$4,5 \le z \le 9$

$$M_x = R_3 \cdot z - P_2(z - 4,5);$$
$$M_x\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{15}{4};$$
$$M_x(9) = -28,5.$$

Визначимо коефіцієнти δ_{ij} $\left(i, j = \overline{1,2}\right)$, які входять у канонічні рівняння сил, методом Верещагіна.

Коефіцієнт δ_{11} отримуємо за рахунок множення эпюри M_{x_1} на саму себе.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-6) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)\right) + \frac{1}{2EI}\left(9 \cdot (-6) \cdot (-6)\right) + \\ + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-6) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)\right) = \frac{306}{EI}.$$

Коефіцієнт δ_{22} отримуємо за рахунок множення эпюри M_{x_2} на саму себе.

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9\right) + \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9\right) = \frac{243}{EI}.$$

Коефіцієнт $\delta_{12} = \delta_{21}$ отримуємо за рахунок множення эпюри M_{x_1} на эпюру M_{x_2}.

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot (-6)\right) = -\frac{243}{2EI}.$$

Коефіцієнт δ_{1P} отримуємо за рахунок множення эпюри M_{x_1} на вантажну эпюру M_{x_P}.

$$\delta_{1P} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (-40,5) \cdot (-6)\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-6) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-12)\right) = \frac{1017}{2EI}.$$

Коефіцієнт δ_{2P} отримуємо за рахунок множення эпюри M_{x_2} на вантажну эпюру M_{x_P}. Множення эпюр на відрізку $1-2$ не викликає незручностей, але для множения эпюр на відрізку $4-2$ застосуємо "метод розшарування" эпюр. "Розшарувувати" на відрізку $4-2$ будемо вантажну эпюру M_{x_P}.

$$\delta_{2P} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (-40,5) \cdot \frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9\right) + \\ + \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (-36) \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)\right) = -\frac{9801}{16EI}.$$

5. Підставляємо знайдені коефіцієнти у канонічні рівняння та розв'язуємо систему.

$$\begin{cases} 306\, x_1 - \dfrac{243}{2}\, x_2 + \dfrac{1017}{2} = 0; \\ -\dfrac{243}{2}\, x_1 + 243\, x_2 - \dfrac{9801}{16} = 0. \end{cases}$$

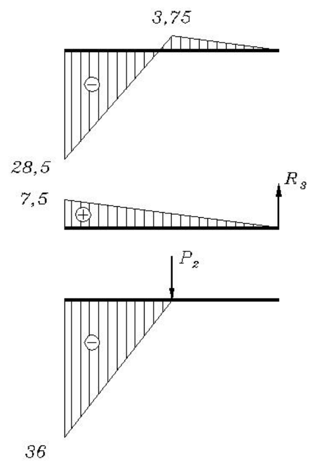


Рис.14

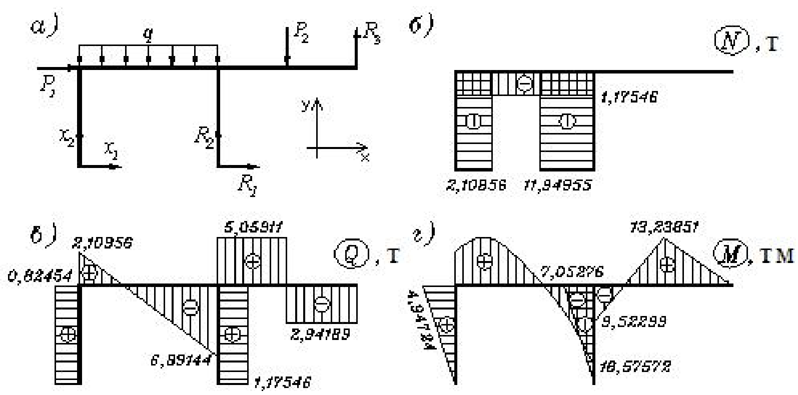


Рис.15

Розв'язавши систему, визначаємо

$$\begin{cases} x_1 = & -\dfrac{719}{872} \approx -\,0,83 \text{ (т)}; \\ x_2 = & \dfrac{1379}{654} \approx \quad 2,11 \text{ (т)}. \end{cases}$$

6. Побудуємо кінцеві епюри повздовжних та поперечних сил, а також епюру згинаючих моментів. З цією метою складемо рівняння рівноваги для плоскої системи сил з урахуванням знайдених величин x_1 и x_2 (рис. 15).

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_i F_{x_i} = 0; \\ \displaystyle\sum_i F_{y_i} = 0; \\ \displaystyle\sum_i M_3(\overline{F}_i) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + P_1 + R_1 = 0; \\ x_2 - 9q - P_2 + R_2 + R_3 = 0; \\ -x_2 \cdot 9 - P_1 \cdot 6 + 9q \cdot 4,5 - P_2 \cdot 4,5 + R_3 \cdot 9 = 0. \end{cases}$$

$R_1 = -\,1,17$ (т), $\quad R_2 = 11,95$ (т), $\quad R_3 = 2,94$ (т).

Побудуємо епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q и згинаючого моменту M.

Відрізок $0-1$, де $0 \le z \le 6$

$$
\begin{aligned}
&N = -\,x_2 = -\,2,10856;\\
&Q = -\,x_1 = 0,82454;\\
&M = -\,x_1 \cdot z = 0,82454\,z;\\
&M_x(0) = 0;\\
&M_x(6) = 4,94724.
\end{aligned}
$$

Епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q та згинаючого моменту M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 15.

Відрізок $1-2$, де $0 \le z \le 9$

$$
\begin{aligned}
&N = -\,P_1 - x_1 = -\,1,17546;\\
&Q = x_2 - q\,z = 2,10856 - z;\\
&Q(0) = 2,10856;\\
&Q(9) = -\,6,89144;\\
&M = -\,x_1 \cdot 6 + x_2 \cdot z - q\,z^2/2 = 4,9474 + 2,10856\,z - 0,5\,z^2;\\
&M_x(0) = 4,94724;\\
&M_x(9) = -\,16,57572.
\end{aligned}
$$

Епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q та згинаючого моменту M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 15.

Відрізок $3-2$, де $0 \le z \le 6$

$$
\begin{aligned}
&N = -\,R_2 = -\,11,94955;\\
&Q = -\,R_1 = 1,17546;\\
&M = R_1 \cdot z = -\,1,17546\,z;\\
&M_x(0) = 0;\\
&M_x(6) = -\,7,05276.
\end{aligned}
$$

Епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q та згинаючого моменту M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 15.

Відрізок $4-2$, де $0 \le z \le 9$ розбивається на два відрізка.

$0 \le z \le 4,5$

$$
\begin{aligned}
&N = 0;\\
&Q = -\,R_3 = -\,2,94189;\\
&M = R_3\,z = 2,94189\,z;\\
&M_x(0) = 0;\\
&M_x(4,5) = 13,23851.
\end{aligned}
$$

Епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q та згинаючого момента M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 15.

$4,5 \le z \le 9$

$$
\begin{aligned}
&N = 0;\\
&Q = -R_3 + P_2 = 5,05811;\\
&M = R_3\, z - p_2(z - 4,5) = 2,94189\, z - 8(z - 4,5);\\
&M_x(4,5) = 2,94189;\\
&M_x(9) = -9,52299.
\end{aligned}
$$

Епюри повздовжних сил N, поперечних сил Q та згинаючого момента M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 15.

7. Перевіремо правильність побудови кінцевої епюри M, помножив її на кожну з одиничних эпюр.

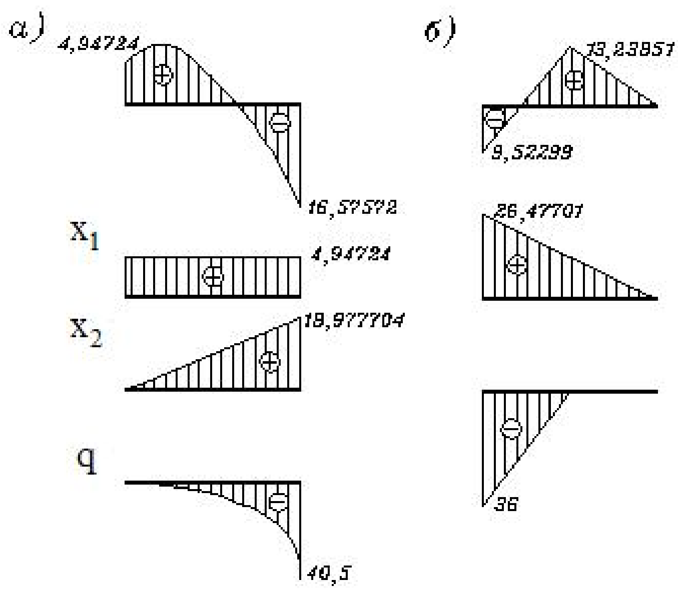


Рис.16

По-перше, помножимо епюру згинаючих моментів M на одиничну епюру M_{x_1}. З цією метою проведемо "розшарування"епюри на відрізку $1-2$ (рис. 16а).

Тоді маємо

$$
M \times M_{x_1} = -\frac{3}{EI}\left(9\cdot 4,94724 + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 18,977704 + \frac{1}{3}\cdot 9\cdot(-40,5)\right) +
$$
$$
+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4,94724\cdot\frac{2}{3}\cdot(-6)\right)+\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(-7,05276)\cdot\frac{2}{3}\cdot(-6)\right)\approx 0.
$$

По-друге, помножимо епюру згинаючих моментів на одиничну епюру M_{x_2}. Для цього застосуємо метод "розшарування"на відрізку $4-2$ (рис. 16б).

Тоді маємо

$$M \times M_{x_2} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9\cdot 4,94724 + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 18,977704\cdot\frac{2}{3}\cdot 9\right) +$$
$$+\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 9\cdot(-40,5)\cdot\frac{3}{4}\cdot 9 + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 26,47701\cdot\frac{2}{3}\cdot 9\right) +$$
$$+\frac{1}{2EI}\cdot 4,5\cdot\frac{1}{2}\cdot(-36)\left(4,5 + \frac{2}{3}\cdot 4,5\right) \approx 0.$$

Таблиця 4

Схема	l, м	h, м	q, Т/м
I	11	2	1,5
II	12	3	2,0
III	3	4	3,0
IV	4	5	0,4
V	5	6	0,5
VI	6	2	0,6
VII	7	3	0,7
VIII	8	4	0,8
IX	9	5	0,9
X	10	6	1,0

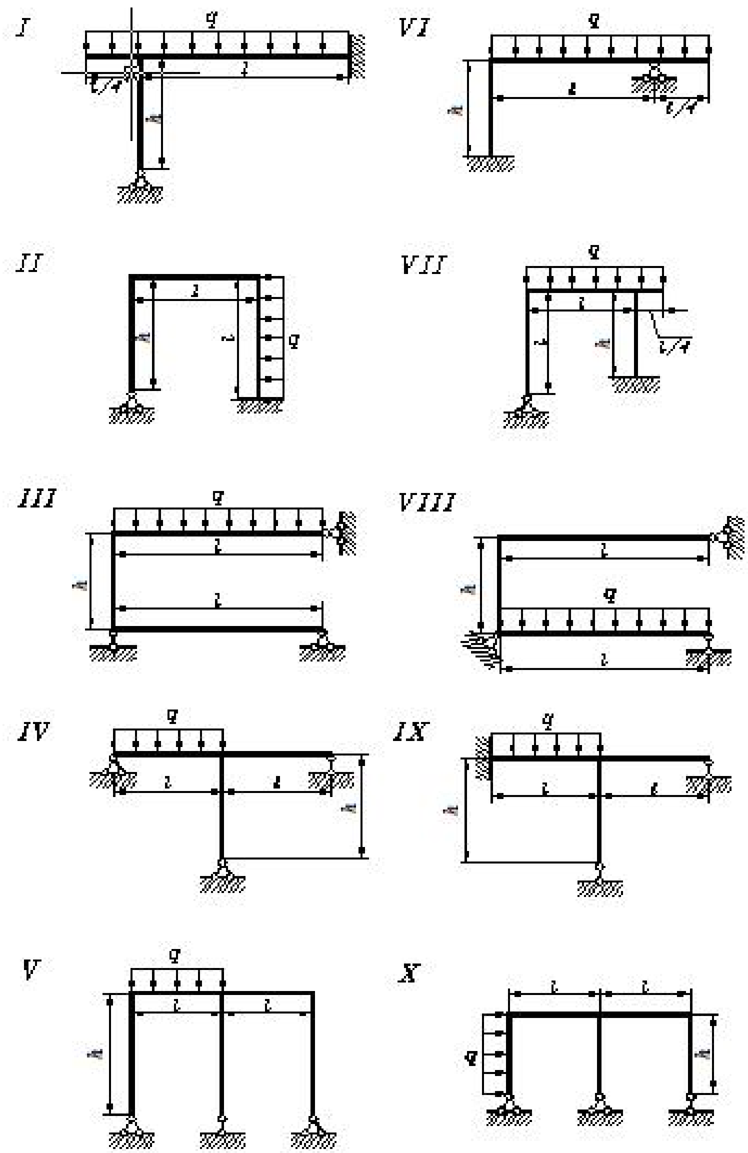


Рис.17

Завдання №5 Розкриття статичної невизначеності для нерозрізних балок

Для балки, що зображена на рис. 20 треба:

1) Знайти величину згинаючого моменту на лівій опорі (в долях ql^2);

2) Побудувати епюри Q та M;

3) Побудувати епюру прогинів, обчисливши три ординати у прольоті та дві на консолі.

Дані узяти з табл. 3.

Вказівка. Відповідь на перше питання задачі можна дата за допомогою рівняння трьох моментів. Під час побудови епюри прогинів необхідно враховувати, що пружна лінія балки обернена опуклістю донизу там, де згинаючий момент додатний, та угнутістю догори там, де він від'ємний. Нульовим точкам епюри відповідають точки перегину пружної лінії.

Зразок завдання №5

Дано: Статично невизначена нерозрізна балка, на яку діють навантаження інтенсивності q та зосереджена сила P, як показано на рис. 18.1а.

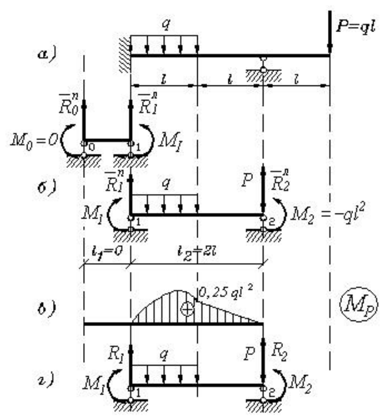


Рис.18.1

Розв'язок

1. Балка один раз статично невизначена, так як в плоскій задачі затиснення дасть три сили реакції зв'язку та шарнірноопертий стержень дасть силу реакції зв'язку, а рівнянь рівноваги плоскої системи сил – три. Для розкриття статичної невизначеності конструкції застосуємо один раз рівняння трьох моментів. З цією метою складемо розрахункову схему балки.

   Зі сторони затиснутого кінця добавимо прогон, довжина якого прямує до нуля (рис. 18.1б). Консоль відкидаємо, сила переноситься на опору (шарнірноопертий стержень) та додається опорний момент $M_2 = -P \cdot l = -q\,l^2$.

2. Пронумеруємо опори зліва направо та зобразимо сили реакції зв'язку (їх проміжні величини), причому кожна опора розбивається на ліву та праву частини.

3. Складемо рівняння статики для знаходження сил реакцій зв'язку від зовнішнього навантаження для кожного прогону балки без урахування опорних моментів M_0, M_1, M_2.

   Розглянемо прогон $0 - 1$. Діють тільки дві сили реакції опор $\overline{R}_0^{\text{П}}$ и $\overline{R}_1^{\text{Л}}$, якщо $l_1 = 0$, звідки слідує $\overline{R}_0^{\text{П}} = \overline{R}_1^{\text{Л}} = 0$ (рис. 18.1б).

   Розглянемо прогон $1 - 2$. Діють навантаження інтенсивності q на відрізку довжини l, зосереджена сила P на опорі 2, а також дві сили реакції зв'язку $\overline{R}_1^{\text{П}}$ и $\overline{R}_2^{\text{Л}}$ (рис. 18.1б).

   Складемо рівняння моментів статики відносно опори 2.

$$-\ \overline{R}_1^{\text{П}} \cdot 2l + q \cdot l \cdot 1,5\,l = 0, \quad \text{звідки} \quad \overline{R}_1^{\text{П}} = 0,75\,ql.$$

   Складемо рівняння моментів статики відносно опори 1.

$$q \cdot l \cdot 0,5\,l + P \cdot 2\,l - \overline{R}_2^{\text{Л}} \cdot 2\,l = 0;$$
$$\overline{R}_2^{\text{Л}} = (0,5\,ql^2 + 2\,ql^2)/(2\,l);$$
$$\overline{R}_2^{\text{Л}} = 1,25\,ql.$$

4. Для кожного прогону балки (як для простої балки на двох опорах) побудуємо епюри згинаючих моментів від зовнішнього навантаження та від знайдених сил реакцій опор без урахування опорних моментів.

   Розглянемо прогон $0 - 1$. Вісь z направимо зліва направо вздовж осі балки з початком відліку у точці 0. По всій довжині прогона $M = \overline{R}_0^{\text{П}} z = 0$. Епюра згинаючого моменту M для зазначеного відрізка конструкції зображена на рис. 18.1в.

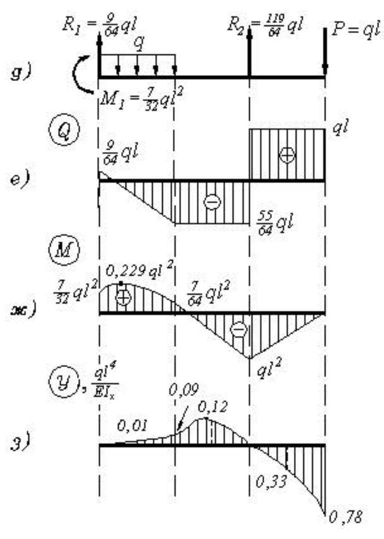


Рис.18.2

Розглянемо прогон $1 - 2$. Вісь z направимо зліва направо вздовж осі балки з початком відліку у точці 1. Прогон розбивається на два відрізки, додатковою точкою розділу є кінець навантаження.

$0 \le z \le l$

$$M = -\,qz^2/2 + \overline{R}_1^{\text{П}} z = 0,75\,ql \cdot z - 0,5\,qz^2;$$
$$M(0) = 0;$$
$$M(l) = 0,25\,ql^2.$$

Епюра згинаючого момента $M = M(z)$ – парабола, гілками донизу. Визначемо вершину параболи.

$$M' = 0,75\,ql - qz = 0, \quad \text{звідки} \quad z = 0,75\,l.$$

Для зазначеного відрізка конструкції епюра згинаючого момента M зображена на рис. 18.1в.

$l \le z \le 2l$

$$M = \overline{R}_1^{\text{П}} z - ql \cdot (z - 0,5\,l) = 0,75\,ql \cdot z - ql \cdot (z - 0,5\,l);$$
$$M(l) = 0,25\,ql^2;$$
$$M(2l) = 0.$$

Епюра згинаючого момента $M = M(z)$ – пряма. Для зазначеного відрізка конструкції епюра згинаючого момента M зображена на рис. 18.1в.

5. Складемо рівняння трьох моментів для опори 1.

$$M_0\,l_1 + 2\,M_1(l_1 + l_2) + M_2\,l_2 = -\,6\left(\omega_1\frac{a_1}{l_1} + \omega_2\frac{b_2}{l_2}\right), \quad \text{де}$$

ω – площа відповідної епюри,
a – відстань до крайньої лівої опори від центра тяжіння відповідної епюри,
b – відстань до крайньої правої опори від центра тяжіння відповідної эпюри.

$$M_0 = 0; \;\; M_2 = -\,ql^2;$$
$$l_1 = 0; \quad l_2 = 2\,l;$$
$$\omega_1 = 0; \quad a_1 = 0; \quad l_1 = 0;$$

Необхідно визначити $\omega_2 b_2$.

Епюра згинаючого момента на прогоні $1 - 2$ складається з двох частин (рис. 18.1в), тому

$$\omega_2 b_2 = (\omega_2 b_2)_I + (\omega_2 b_2)_{II}$$

Але I частина епюри має складний вигляд, тому до неї необхідно застосувати метод "розшаровування".

Тоді маємо

$$\omega_2 b_2 = (\omega_2 b_2)_{I_a} + (\omega_2 b_2)_{I_б} + (\omega_2 b_2)_{II}.$$

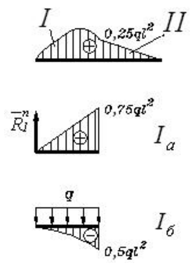


Рис.19

Визначемо кожний доданок зокрема.

$$(\omega_2 b_2)_{I_a} = \frac{1}{2}\cdot l \cdot 0,75\, ql^2 \cdot \left(l + \frac{1}{3}\, l\right) = 0,5\, ql^4;$$

$$(\omega_2 b_2)_{I_б} = \frac{1}{3}\cdot l \cdot (-\,0,5\, ql^2)\cdot \left(l + \frac{1}{4}\, l\right) = -\,\frac{5}{24}\, ql^4;$$

$$(\omega_2 b_2)_{II} = \frac{1}{2}\cdot l \cdot 0,25\, ql^2 \cdot \frac{2}{3}\, l = \frac{1}{12}\, ql^4.$$

Тоді

$$\omega_2 b_2 = \frac{3}{8}\, ql^4.$$

6. Підставимо знайдені величини до рівняння трьох моментів та визначемо опорний момент M_1.

$$2M_1 \cdot 2\, l - ql^2 \cdot 2\, l = -\,6 \cdot \frac{3}{16}\, ql^3;$$

$$4M_1 - 2\, ql^2 = -\frac{9}{8}\, ql^2;$$

$$M_1 = \frac{7}{32}\, ql^2.$$

7. Для прогону балки $1-2$ складемо рівняння моментів статики та визначемо істині значення сил реакцій опор (рис. 18.1г).

   Складемо рівняння моментів статики відносно опори 2.

$$-\, M_1 - R_1 \cdot 2\, l + q \cdot l \cdot 1,5\, l + M_2 = 0, \text{звідки}\, R_1 = \frac{9}{64}\, ql.$$

   Складемо рівняння моментів статики відносно опори 1.

$$-\, M_1 - q \cdot l \cdot 0,5\, l + R_2 \cdot 2\, l - P \cdot 2\, l + M_2 = 0, \text{звідки}\, R_2 = \frac{119}{64}\, ql.$$

8. Побудуємо епюри поперечних сил Q та згинаючих моментів M для балки, зображенної на рис. 18.2д.

Вибераємо вісь z, напрямлену зліва направо, з початком відліку у точці 1.
$0 \le z \le l$

$$Q = R_1 - qz = \frac{9}{64}\,ql - qz;$$
$$Q(0) = \frac{9}{64}\,ql;$$
$$Q(l) = -\,\frac{55}{64}\,ql;$$
$$M = -\,M_1 + R_1 \cdot z - \,qz^2/2 = \frac{9}{64}\,ql \cdot z - qz^2/2 + \frac{7}{32}\,ql^2;$$
$$M(0) = \frac{7}{32}\,ql^2;$$
$$M(l) = \frac{7}{64}\,ql^2.$$

Епюра згинаючого момента $M = M(z)$ – парабола, "гілками"донизу.

Визначимо положення вершини параболи.

$$M' = \frac{9}{64}\,ql - qz = 0, \quad \text{звідки} \quad z = \frac{9}{64}\,l;$$
$$M\left(\frac{9}{64}\,l\right) = 0,229\,ql^2.$$

Епюри поперечних сил Q та згинаючих моментів M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 18.2е и 18.2ж.

$l \le z \le 2l$

$$Q = R_1 - ql = \frac{9}{64}\,ql - ql = -\,\frac{55}{64}\,ql;$$
$$M = -\,M_1 + R_1 \cdot z - ql(z - 0,5\,l) = \frac{9}{64}\,ql\,z - ql(z - 0,5\,l) + \frac{7}{32}\,ql^2 \quad ;$$
$$M(l) = \frac{7}{64}\,ql^2;$$
$$M(2l) = -\,ql^2.$$

$2l \le z \le 3l$

$$Q = R_1 - ql + R_2 = \frac{9}{64}\,ql - ql + \frac{119}{64}\,ql = ql;$$
$$M = -\,M_1 + R_1 \cdot z - ql(z - 0,5\,l) + R_2(z - 2\,l) =;$$
$$= \frac{9}{64}\,ql\,z - ql(z - 0,5\,l) + \frac{7}{32}\,ql^2 + \frac{119}{64}\,ql(z - 2\,l);$$
$$M(2l) = -\,ql^2;$$
$$M(3l) = 0.$$

Епюри поперечних сил Q та згинаючих моментів M для зазначеного відрізка конструкції зображені на рис. 18.2е и 18.2ж.

Проаналізуємо отримані епюри. Эпюра поперечних сил Q (рис. 18.2е) зліва має стрибок, який дорівнює за величиною силі R_1, справа – стрибок за величиною рівний силі P, а в точці 2 стрибок дорівнює за величиною силі R_2. Епюра згинаючих моментів M (рис. 18.2ж) зліва також має стрибок за величиною рівний моменту затиснення M_1.

9. Для побудови епюри прогибів запишемо універсальне рівняння пружної лінії балки.

   Так як лівий кінець балки защімлений, то y_0 и θ_0 дорівнюють нулю.

   Для $0 \leq z \leq l$

$$EI_x\, y = M_1 z^2/2 + R_1\, z^3/6 - qz^4/24 = \frac{7ql^2}{64}\, z^2 + \frac{9ql}{384} z^3 - \frac{q}{24} z^4.$$

   Для $l \leq z \leq 2l$

$$EI_x\, y = M_1 z^2/2 + R_1\, z^3/6 - qz^4/24 + q(z-l)^4/24 = \\ = \frac{7ql^2}{64}\, z^2 + \frac{9ql}{384} z^3 - \frac{q}{24} z^4 + \frac{q}{24}(z-l)^4.$$

   Для $2l \leq z \leq 3l$

$$EI_x\, y = M_1 z^2/2 + R_1\, z^3/6 - qz^4/24 + q(z-l)^4/24 + R_2 \frac{(z-2\,l)^3}{6} = \\ = \frac{7ql^2}{64}\, z^2 + \frac{9ql}{384} z^3 - \frac{q}{24} z^4 + \frac{q}{24}(z-l)^4 + \frac{119}{384}\, ql(z-2\,l)^3.$$

   Визначимо три значення ординати в прогоні,наприклад, $z = \frac{l}{2};\ l;\ \frac{3}{2}\, l.$

$$EI_x\, y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{7ql^2}{64}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{9ql}{384}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{q}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^4 = 0,028\, ql^4;$$
$$y\left(\frac{l}{2}\right) = 0,028\, \frac{ql^4}{EI_x}.$$

$$EI_x\, y(l) = \frac{7ql^2}{64}\, l^2 + \frac{9ql}{384}\, l^3 - \frac{q}{24}\, l^4 = 0,091\, ql^4;$$
$$y(l) = 0,091\, \frac{ql^4}{EI_x}.$$

$$EI_x\, y\left(\frac{3}{2}\, l\right) = \frac{7ql^2}{64}\left(\frac{3}{2}\, l\right)^2 + \frac{9ql}{384}\left(\frac{3}{2}\, l\right)^3 - \frac{q}{24}\left(\frac{3}{2}\, l\right)^4 + \\ + \frac{q}{24}\left(\frac{3}{2}\, l - l\right)^4 = 0,117\, ql^4;$$
$$y\left(\frac{3}{2}\, l\right) = 0,117\, \frac{ql^4}{EI_x}.$$

На рис. 18.2 з схематично зображена епюра прогинів балки.

Для перевірки побудови епюр визначимо перемещіння опори 2.

$$EI_x\, y(2l) = \frac{7ql^2}{64}\,(2l)^2 + \frac{9ql}{384}\,(2l)^3 - \frac{q}{24}(2l)^4 + \frac{q}{24}(2l-l)^4 = 0.$$

Визначимо два значення ординати на консолі,наприклад, $z = 2,5l;\ 3l.$

$$EI_x\, y(2,5l) = \frac{7ql^2}{64}\,(2,5l)^2 + \frac{9ql}{384}\,(2,5l)^3 - \frac{q}{24}(2,5l)^4 + \\ + \frac{q}{24}(2,5l-l)^4 + \frac{119}{384}\,ql(2,5l-2l)^3 = -\,0,3281\,ql^4$$

$$y(2,5l) = -\,0,3281\,\frac{ql^4}{EI_x}.$$

$$EI_x\, y(3l) = \frac{7ql^2}{64}\,(3l)^2 + \frac{9ql}{384}\,(3l)^3 - \frac{q}{24}(3l)^4 + \frac{q}{24}(3l-l)^4 + \\ + \frac{119}{384}\,ql(3l-2l)^3 = -\,0,7813\,ql^4;$$

$$y(3l) = -\,0,7813\,\frac{ql^4}{EI_x}.$$

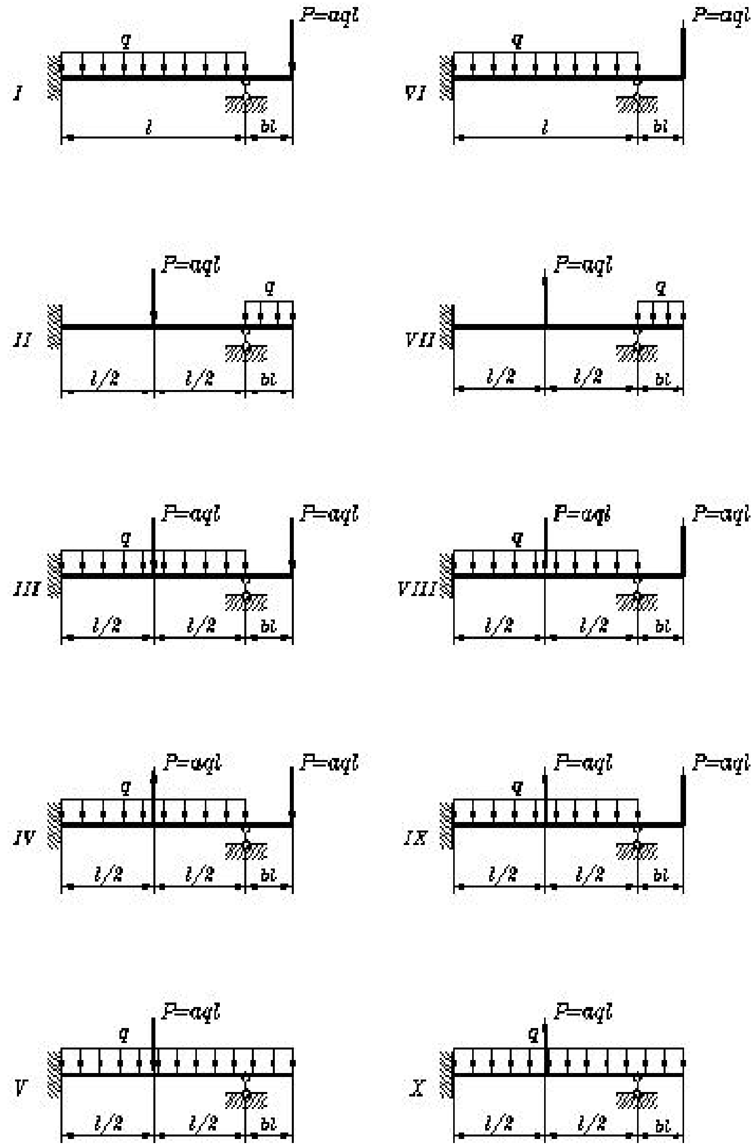


Рис.20

Навчальне видання

Косирєва Ліаліна Анатоліївна
Рачинська Алла Леонідівна

Методичні вказівки та контрольні завдання за курсом "Опір матеріалів"для студентів спеціальності Механіка

Видано в авторській редакції

Підп. до друку 20.04.10 Формат 84x108.16.
Гарн.Таймс.Тираж 20 прим.
Редакційно-видавничий Центр
Одеського національного університету
імені І.І.Мечникова,
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39